

Аддитивная комбинаторика. Разминка

5 июля

1. **(а)** Множество A состоит из n целых чисел. Докажите, что существует непустое подмножество $B \subset A$, сумма чисел в котором делится на n .
 - (б)** В ряд выписаны натуральные числа a_1, a_2, \dots, a_7 . Докажите, что можно выбрать некоторые из них и поставить перед каждым выбранным числом $+$ или $-$ так, чтобы значение полученного выражения делилось на 101.
 2. Дано 70 различных натуральных чисел, не превосходящих 200. Докажите, что какие-то два из них различаются на четыре, пять или девять.
 3. Среди натуральных чисел от 1 до 365 выбрали **(а)** 39; **(б)** 29. Докажите, что среди них найдутся 4 числа a, b, c, d таких, что $a + b = c + d$.
 4. Сто одно натуральное число из диапазона от 1 до 10^6 покрасили в синий цвет. Докажите, что можно выбрать 100 красных чисел из этого же диапазона так, чтобы все возможные суммы красного и синего числа были попарно различными.
- Если $(G, +)$ — аддитивная группа, $A, B \subset G$, то положим $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$, $A - B = \{a - b \mid a \in A, b \in B\}$.
5. Докажите, что если $A, B \subset \mathbb{R}$, $|A| \geq 2$ и $|B| \geq 2$, и $|A + B| = |A| + |B| - 1$, то A, B — арифметические прогрессии с одинаковой разностью.
 6. Даны натуральные числа $n < m < k + 2$. Найдите размер наибольшего подмножества в $\{1, 2, \dots, k\}$, в котором никакие n различных элементов не дают в сумме m .
 7. **(а)** Придумайте множество, состоящее из целых чисел, для которого $|A + A| > |A - A|$.
 - (б)** Докажите, что частное $|A + A|/|A - A|$, где $A \subset \mathbb{Z}$, бывает сколь угодно большим.